Gödels Incompleteness Theorems

Episode I: Einführung

Inhaltsübersicht

- Generelle Beweisidee Gödels
- Eigenschaften und Relationen der Sprache $\mathscr{L}$
- „Tools & Rules“
- Beweise, 1. Teil
- Anforderungen an $\mathscr{L}$
- „Tools & Rules“, 2. Teil
- Beweise, 2. Teil
- Konsequenzen: Unendscheidbare Sätze

Generelle Beweisidee

- Beweisaussage:
  - “Jedes hinreichend mächtige formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.”
- Generelle Methode:
  - Abzählung aller Sätze innerhalb eines formalen Systems
  - “Der Satz mit der Nummer x ist nicht beweisbar”
    - $\Rightarrow$ “Ich bin nicht beweisbar.”
  - Kann nur wahr sein, da sonst die Korrektheit nicht gewährleistet wäre
  - Funktioniert nur mit formalen Systemen, die Zählungen erlauben
- Erinnerung: Knappen, Ritter und der Logiker

Gödels Incompleteness Theorems

Eigenschaften und Relationen

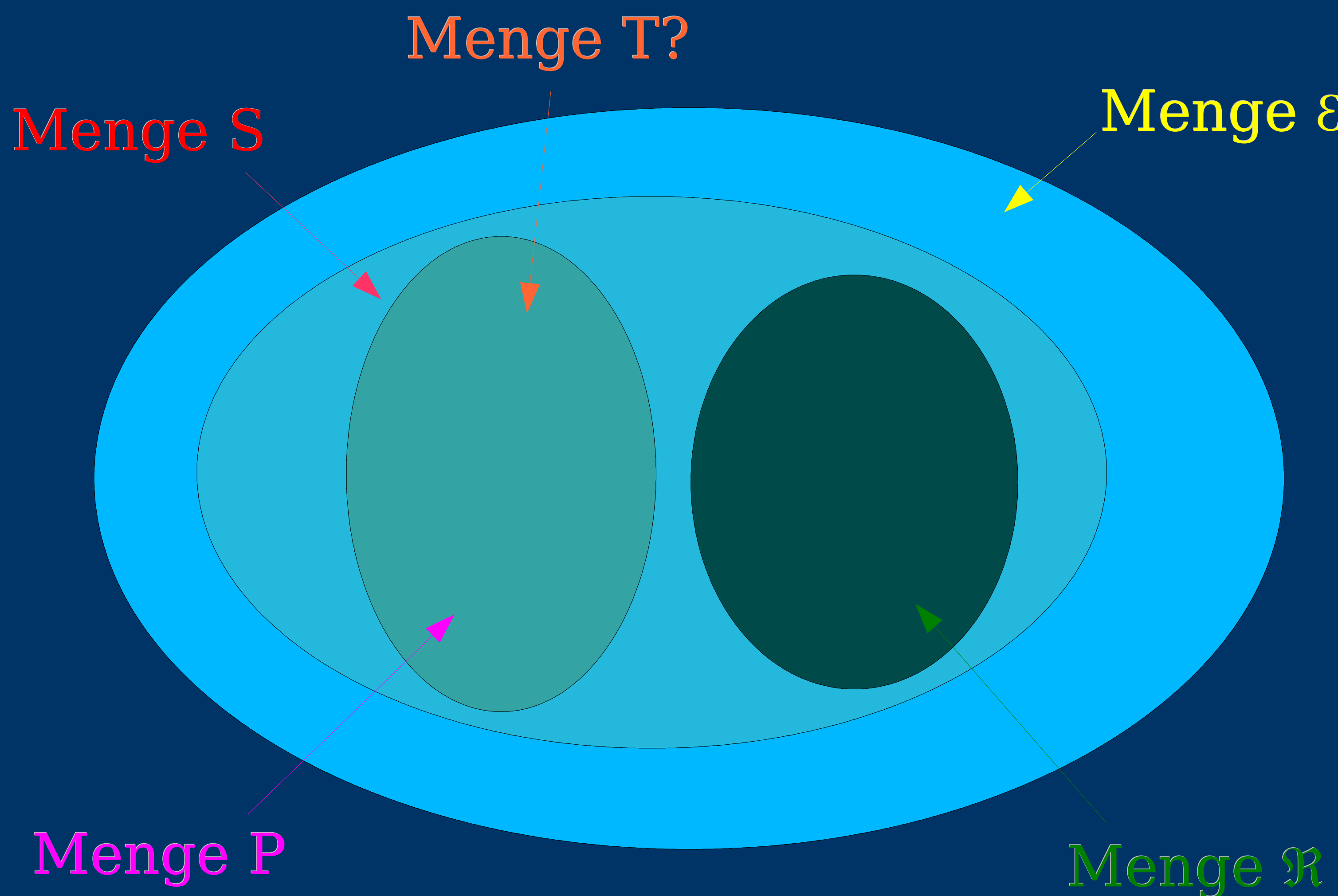
Syntax

- Es existieren in $\mathscr{L}$:
  - Abzählbare Menge $\mathcal{E}$, dessen Elemente die Ausdrücke von $\mathscr{L}$ genannt werden
  - Untermenge S von $\mathcal{E}$, deren Elemente Sätze von $\mathscr{L}$ genannt werden
  - Untermenge P von S, deren Elemente beweisbare Sätze von $\mathscr{L}$ genannt werden
  - Untermenge $\mathfrak{R}$ von S, deren Elemente widerlegbare Sätze von $\mathscr{L}$ genannt werden

Syntax

  - Untermenge H von $\mathcal{E}$, deren Elemente die Prädikate (Eigenschaften) von $\mathscr{L}$ genannt werden
  - Eine Funktion Φ, die jedem Ausdruck E und jeder natürlichen Zahl n den Ausdruck E(n) zuweist. Die Funktion muss die Bedingung erfüllen, dass für jedes Prädikat H und jede natürliche Zahl n der Ausdruck H(n) ein Satz ist
- Für den ersten Unvollständigkeitsbeweis, werden wir ein bestimmtes System $\mathscr{L}$ verwenden, so dass zusätzlich gelten muss:
  - Es gibt eine Menge T von Sätzen, die wir als wahre Sätze von $\mathscr{L}$ bezeichnen

Illustration der Relationen zwischen den Mengen



ε – Expression
S – Sentence
P – Provable
ℜ– Refutable
T – True

Gödels Incompleteness Theorems

Tools & Rules

Prädikate

- Wir definieren ein Prädikat H für eine Nummer n genau dann als wahr, wenn H(n) ein wahrer Satz ist, d.h. Element T ist
- Mit der Menge ausgedrückt durch H meinen wir die Menge aller n, die H erfüllen
- Daher gilt für alle Zahlenmengen A, H drückt A genau dann aus, wenn für alle n gilt:

$$H(n) \in T \Leftrightarrow n \in A$$

Zahlensysteme

- Eine Menge A wird genau dann benennbar in $\mathscr{L}$ genannt, wenn sie durch ein beliebiges Prädikat ausgedrückt werden kann.
- abzählbar viele Ausdrücke in $\mathscr{L}$ $\Rightarrow$ abzählbar viele Prädikate (H ist Untermenge von Ɛ)
- überabzählbar viele Mengen von natürlichen Zahlen $\Rightarrow$ es lässt sich nicht jede Menge ausdrücken

Korrektheit

- Ein System $\mathscr{L}$ ist genau dann korrekt, wenn jeder beweisbare Satz wahr und jeder widerlegbare Satz falsch ist.
- Das heißt:

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{T} \wedge (\Re \cap \mathrm{T}) = \emptyset$$

Gibt es einen wahren Satz in $\mathscr{L}$, der nicht beweisbar ist?

Funktionen

- Gödelisierungsfunktion g weist jedem Ausdruck E eine natürliche Zahl zu
- Zahl wirkt wie eine Referenz auf den Ausdruck (eindeutig identifizierbar)
- Außerdem sagen wir, dass jede natürliche Zahl die Gödelnummer eines Ausdrucks ist.
- Ausdruck E_n ist der Ausdruck, dessen Gödelnummer n ist, d.h. $g(E_n)=n$.

Funktionen

- Diagonalisierungsfunktion d, berechnet die Gödelnummer des Ausdrucks $E_n(n)$
- wenn E_n ein Prädikat ist, ist seine Diagonalisierung ein Satz (laut Definition der Funktion Φ)
- Satz ist genau dann wahr, wenn n E_n erfüllt

Zusammenfassung der Funktionen

- **Function** $\Phi()$
  - Input:
    - E as expression
    - GoedelNum as integer
  - Output:
    - E(n) as expression
- **Function** g()
  - Input:
    - E as expression
  - Output:
    - GoedelNum as integer
- **Function** d()
  - Input:
    - GoedelNum as integer
  - Output:
    - DiagNum as integer

Wenn E sogar ein Prädikat ist, kommt ein Satz heraus.

Eigenschaften

- Für alle Mengen von natürlichen Zahlen A meinen wir mit A* die Menge aller Gödelnummern n, so dass $d(n) \in A$ ist.
- Deshalb gilt natürlich:

$$n \in A^* \Leftrightarrow d(n) \in A$$

Komplement

- Für alle Zahlenmengen A meinen wir mit $\widetilde{A}$ das Komplement von A relativ zur Menge der natürlichen Zahlen (also alle Zahlen, die nicht in A, aber in $\mathbb{N}$ sind).
- Wir definieren P als die Menge der Gödelnummern aller beweisbaren Sätze.

Gödels Incompleteness Theorems

Beweise, 1. Teil

Theorem (GT)

- Behauptung:
  - Wenn die Menge $\widetilde{\mathrm{P}}^*$ in $\mathscr{L}$ ausdrückbar und $\mathscr{L}$ korrekt ist, gibt es einen wahren Satz in $\mathscr{L}$, der in diesem System nicht beweisbar ist.

Beweis von Theorem GT

- Annahmen:
  - $\mathscr{L}$ korrekt
  - $\widetilde{\mathrm{P}}^*$ lässt sich ausdrücken
- Sei:
  - H das Prädikat, was $\widetilde{\mathrm{P}}^*$ ausdrückt
  - h die Gödelnummer von H
  - G die Diagonalisierung von H (der Satz H(h))

Beweis von Theorem GT

- Daraus folgt:

  $H(n)$ ist wahr $\Leftrightarrow n \in \widetilde{P}^* \quad \forall n$

  $\Rightarrow H(h)$ ist wahr $\Leftrightarrow h \in \widetilde{P}^*$

  $\Rightarrow h \in \widetilde{P}^* \Leftrightarrow d(h) \in \widetilde{P} \Leftrightarrow d(h) \notin P$

  $d(h)$ ist die Gödelnummer von $H(h)$, da h die Gödelnummer von H ist, deshalb gilt:

  $d(h) \in P \Leftrightarrow H(h)$ ist beweisbar in $\mathscr{L}$

  $d(h) \notin P \Leftrightarrow H(h)$ ist nicht beweisbar in $\mathscr{L}$

Beweis von Theorem GT

- Wir haben jetzt also:
  - H(h) ist wahr $\Leftrightarrow$ H(h) ist nicht beweisbar in $\mathscr{L}$
  - Entweder H(h) ist wahr und nicht beweisbar oder falsch und beweisbar.
  - Die letzte Alternative verletzt die Korrektheit des Systems, d.h. H(h) muss wahr, aber nicht beweisbar sein.

Gödels Incompleteness Theorems

Anforderungen

Anforderungen an $\mathscr{L}$

- $\widetilde{\mathrm{P}}^*$ ist ausdrückbar in $\mathscr{L}$
  - (G1) Für alle Mengen A ausdrückbar in $\mathscr{L}$, ist die Menge A^* ausdrückbar in $\mathscr{L}$.
  - (G2) Für alle Mengen A ausdrückbar in $\mathscr{L}$, ist die Menge $\widetilde{\mathrm{A}}$ ausdrückbar in $\mathscr{L}$.
  - (G3) Die Menge P ist ausdrückbar in $\mathscr{L}$.

Gödels Incompleteness Theorems

Tools & Rules, 2. Teil

Definition: Gödelsätze

- Ein Satz E_n ist genau dann ein Gödelsatz einer beliebigen Menge A, wenn er folgende Eigenschaft besitzt:

$$E_n \in T \Leftrightarrow n \in A$$

- Damit ist ein Gödelsatz im Prinzip einer, der aussagt, dass seine eigene Gödelnummer in A liegt.

Gödels Incompleteness Theorems

Beweise, 2. Teil

Theorem (D)

- Behauptung:
  - (a) Für alle Mengen A gilt, wenn A* ausdrückbar in $\mathscr{L}$ ist, dann existiert ein Gödelsatz für A.
  - (b) Wenn für alle Mengen A, die ausdrückbar in $\mathscr{L}$ sind, auch A* in $\mathscr{L}$ ausdrückbar ist, dann existiert für alle A ein Gödelsatz.

Beweis von Theorem D

- Sei:
  - H das Prädikat, welches A* in $\mathscr{L}$ ausdrückt
  - h die Gödelnummer von H
  - d(h) ist die Gödelnummer von H(h)

Beweis von Theorem D

- Dann folgt:

  $H(n)$ ist wahr $\Leftrightarrow n \in A^* \quad \forall n$

  $\Rightarrow H(h)$ ist wahr $\Leftrightarrow h \in A^*$

  $h \in A^* \Leftrightarrow d(h) \in A$

  $\Rightarrow H(h)$ ist wahr $\Leftrightarrow d(h) \in A$

  Da $d(h)$ die Gödelnummer von $H(h)$ ist, ist $H(h)$ ein Gödelsatz für A.

  Behauptung (b) folgt direkt daraus.

Alternativer Beweis von Theorem GT

- Da $\widetilde{\mathrm{P}}^*$ benennbar ist in $\mathscr{L}$, gibt es nach Theorem D einen Gödelsatz G für $\widetilde{\mathrm{P}}$.
- Ein Gödelsatz für $\widetilde{\mathrm{P}}$ ist genau dann wahr, wenn er nicht beweisbar ist (er sagt so etwas wie „Ich bin nicht beweisbar“).
- Dieser Satz muss in allen korrekten Systemen wahr, aber nicht beweisbar sein.

Theorem (T)

- Behauptung:
  - Wenn T die Menge der Gödelnummern aller wahren Sätze in $\mathscr{L}$ ist, dann gilt:
    (1) Die Menge $\widetilde{\mathrm{T}}^*$ ist nicht benennbar in $\mathscr{L}$.
    (2) Wenn für alle Mengen A, die in $\mathscr{L}$ ausdrückbar sind, auch A* auszudrücken ist, dann ist auch $\widetilde{\mathrm{T}}$ nicht in $\mathscr{L}$ auszudrücken.
    (3) Wenn für alle Mengen A, die in $\mathscr{L}$ ausdrückbar sind, sowohl A* als auch $\widetilde{\mathrm{A}}$ ausdrückbar sind, dann ist die Menge T nicht in $\mathscr{L}$ auszudrücken.

Beweis von Theorem T

- Sei:
  - T die Menge der Gödelnummern aller wahren Sätze.
- Dann gilt:

(1) Wenn $\widetilde{T}^*$ ausdrückbar in $\mathscr{L}$ wäre, dann gäbe es nach Theorem D, Behauptung a einen Gödelsatz für die Menge $\widetilde{T}$.

➢ Das kann nicht sein, da dieser Satz genau dann wahr wäre, wenn seine Gödelnummer nicht die Nummer eines wahren Satzes wäre, was paradox ist.

(2) Wenn (G1) stimmt und $\widetilde{T}$ benennbar wäre in $\mathscr{L}$, dann wäre auch $\widetilde{T}^*$ benennbar in $\mathscr{L}$, was einen Widerspruch zu (1) darstellt.

(3) Wenn (G2) auch noch stimmt und T benennbar wäre in $\mathscr{L}$, dann wäre $\widetilde{T}$ auch benennbar, was im Widerspruch zu (2) steht.

Gödels Incompleteness Theorems

Konsequenzen

Konsistenz

- Ein System wird genau dann konsistent genannt, wenn kein Satz sowohl beweis- als auch widerlegbar ist ($(\Re \cap P) = \emptyset$), ansonsten heißt dieses System inkonsistent.
- Jedes korrekte System ist automatisch konsistent, die Umkehrung gilt nicht zwingend ($P \subseteq T$ wird nicht verlangt).

Entscheidbarkeit

- Ein Satz X ist genau dann entscheidbar, wenn er entweder beweis- oder widerlegbar ist in $\mathscr{L}$.
- Ein System heißt vollständig, wenn jeder Satz entscheidbar ist, ansonsten heißt es unvollständig.

Konsequenzen: Theorem 1

- Wenn Theorem (GT) erfüllt wird und $\mathscr{L}$ korrekt ist, dann ist ein Satz G wahr, aber nicht beweisbar in $\mathscr{L}$.
- Demzufolge ist G unentscheidbar und wir kommen zu:
- Wenn $\mathscr{L}$ korrekt ist und die Menge $\widetilde{\mathrm{P}}^*$ sich in $\mathscr{L}$ ausdrücken lässt, dann ist $\mathscr{L}$ unvollständig.

Duales Theorem zu 1

- Behauptung:
  - Wenn $\mathscr{L}$ korrekt ist und die Menge R* lässt sich in $\mathscr{L}$, ausdrücken, dann ist $\mathscr{L}$ unvollständig.

Beweis des Theorems

- Annahmen:
  - $\mathscr{L}$ ist korrekt
  - R* lässt sich in $\mathscr{L}$ ausdrücken
- Sei:
  - K ein Prädikat, dass die Menge R* ausdrückt
  - k die Gödelnummer von K

Beweis des Theorems

- Dann folgt:
  - Da K die Menge R* ausdrückt, ist nach Theorem D, Behauptung a K(k) ein Gödelsatz für R.
  - Dieser Satz ist genau dann wahr, wenn seine Gödelnummer in R liegt, d.h. er ist genau dann wahr, wenn er widerlegbar ist.
  - Dieser Satz muss falsch, aber nicht widerlegbar sein in allen korrekten Systemen. Damit ist er unentscheidbar.

Anforderungen an das System für dieses Theorem

- Die Menge R* lässt sich ausdrücken:

  (G1) Für alle ausdrückbaren Mengen A, ist die Menge A* auszudrücken.

  (G3') Die Menge R ist ausdrückbar.